

Aula 4 e 26

Energia armazenada num campo magnético

1. Introdução

Vamos calcular a corrente no circuito

abaixo (ver fig 1) depois de fechado o interruptor

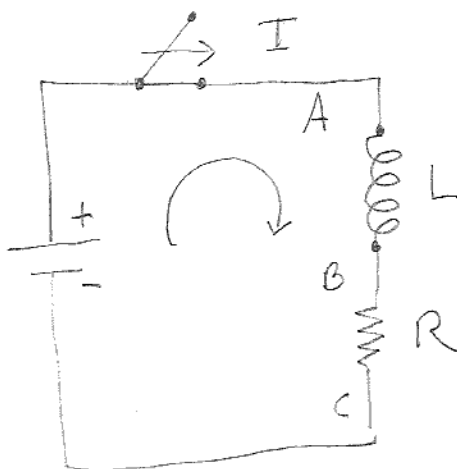


Figura 1

Pela lei das malhas

$$\mathcal{E}_0 - L \frac{dI}{dt} = RI$$

(1)

$$L \frac{dI}{dt} - RI = \mathcal{E}_0$$

Utilizando a condição inicial $\mathcal{E}_0, t=0, I=0$

temos como solução

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{R} (1 - e^{-(R/L)t}) \quad (2)$$

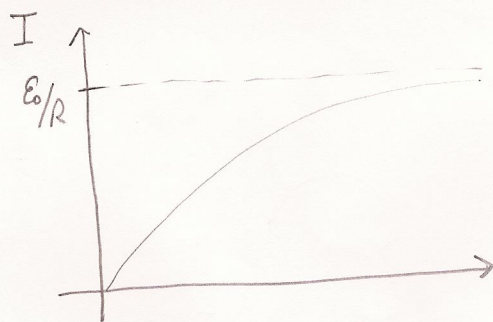


Fig. 2

2. Agora vamos remover a bateria da
fig. 1. Então pela lei das malhas

$$0 = L \frac{dI}{dt} + RI \quad (3)$$

Utilizando a condição inicial $I = I_0$

p/ $t = t_1$, a solução da Eq. diferencial dada na Eq. (3) é

$$I = I_0 e^{-(R/L)(t-t_1)} \quad (4)$$

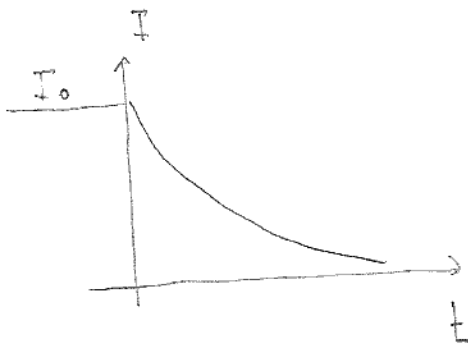


Fig. 3

2. Energia do Campo Magnético

A energia dissipada ^{pelos resistores R} no decaiimento
mostrado na Fig. 3 é

$$U = \int_{t_1}^{\infty} R I^2 dt = R I_0^2 \int_{t_1}^{\infty} e^{-(2R/L)(t-t_1)} dt \quad (5)$$

fazendo uma mudança de variáveis

$x = 2R(t-t_1)/L$, a Eq. (5) torna-se

$$U = R I_0^2 \left(\frac{L}{2R} \right) \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \frac{L I_0^2}{2} \quad (6)$$

Lembrando que

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

Como numa bobina $\Phi = LI$, isso significa

que

$$\mathcal{E} = - L \frac{dI}{dt}$$

Isso esclarece a utilidade das
leis dos fluxos que dá origem às

Eq. (1) e Eq. (3)

(ver Griffiths página 317)

6.

Voltando a Eq. (6), podemos interpretar a Eq. (6), como a energia armazenada no campo magnético do indutor

De maneira geral

$$U = \frac{1}{8\pi} \int B^2 d\tau \quad \text{Gaussiano} \quad (7.a)$$

ou

$$U = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 d\tau \quad \text{SI} \quad (7.b)$$

$$\phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{a} = \oint A \cdot d\vec{\ell}$$

Então

$$\phi = LI = \oint \vec{A} \cdot d\vec{\ell} \quad (8)$$

Como

$$U = \frac{1}{2} L I^2$$

podemos escrever

utilizando Eq. (8) que

$$U = \frac{1}{2} I \oint \vec{A} \cdot d\vec{\ell} \quad (9)$$

ou

$$U = \frac{1}{2} \oint \vec{A} \cdot \vec{I} \, d\ell \quad (10)$$

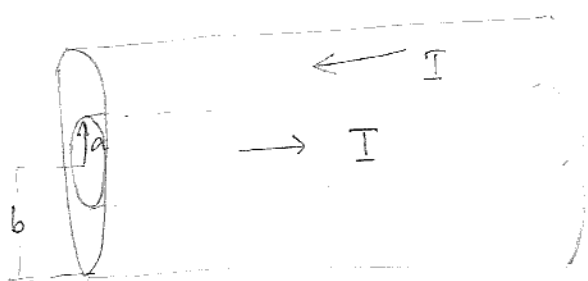
Então podemos dizer que $B^2/2\mu_0$ é
a energia armazenada por unidade de volume

Energia Magnética

Griffiths pag. 319

Exemplo 3

Um cabo longo co-axial com corrente I .
 (a corrente flui na superfície do cilindro interno
 e na superfície do cilindro externo como
 mostrado na figura abaixo). Encontre a energia
 magnética armazenada em uma seção de raio l



$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\phi} & \text{entre os cilindros} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\text{all space}} B^2 dv$$

10.

Energia p/ unidade de volume

$$\frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi s} \right)^2 = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 s^2}$$

A energia numa
casca esférica de
espessura ds



$$= \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 s^2} \underbrace{2\pi l s ds}_{\text{volume da casca esférica (em metros)}}$$

$$= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} l \frac{ds}{s}$$

Integrando de entre os ~~dois~~ cilindros

$$W = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \ln b/a$$